

# CARACTERIZAÇÃO DA CONTINUIDADE DE FUNÇÕES ENTRE SUBCONJUNTOS *L*-FUZZY. Edgar Luis Bezerra de Almeida, Hércules de Araújo Feitosa. Área – Matemática – Engenharia Elétrica – Departamento de Matemática – Faculdade de Ciências – *Campus* de Bauru.

Zadeh<sup>[5]</sup> definiu, em 1965, um subconjunto fuzzy  $A$  de um dado conjunto  $X$  através da função de pertinência  $\mu_A: X \rightarrow [0, 1]$ , denominada função característica de  $A$ , que associa a cada elemento de  $X$  um grau de pertinência entre 0 e 1 no conjunto  $A$ . Assim, em vez da bi-valorização “ $x$  pertence a  $A$ ” ou “ $x$  não pertence a  $A$ ”, podemos obter infinitos graus de pertinência intermediários entre 0 e 1. Trabalhando dessa forma, os problemas decorrentes do uso de termos vagos como, por exemplo, alto, morno, rápido, etc. podem ser resolvidos e podemos caracterizar tais termos de modo preciso. A motivação para que Zadeh adotasse tal procedimento se deveu ao fato de que sistemas especialistas e elementos de inteligência artificial não podem ser bem modelados sem esses termos.

Como exemplo, consideremos como universo de discurso  $X$  o conjunto dos seres humanos do sexo masculino e  $A$  o subconjunto fuzzy de homens de meia idade. Assim, podemos definir a função característica:  $\mu_A(x) = -0,01x^2 + 0,7x - 11,25$  se  $25 \leq x \leq 45$  e  $\mu_A(x) = 0$  caso contrário. Desse modo, nossa intuição é bem traduzida e verificamos que um homem de 20 anos não é de meia idade pois  $\mu(20) = 0$ , enquanto um homem de 40 anos está tanto na meia idade assim como um outro de 30 anos ( $\mu(30) = \mu(40) = 0,75$ ) e que um homem de 28 anos está, por motivos óbvios, mais distante da meia idade do que o homem de 30 anos ( $\mu(28) = 0,51$ ). Finalmente, um homem de 35 anos definitivamente está na meia idade, pois  $\mu(35) = 1$ . A função de pertinência não é determinada de forma única e, assim, um mesmo homem  $x$  pode ter diferentes graus de pertinência no conjunto dos homens de meia idade, conforme se defina de diferentes formas a função característica  $\mu_A$ . Tal fato é encarado como uma vantagem dos subconjuntos fuzzy, na medida em que podemos adequar a função característica às particularidades de nossa aplicação. Ressaltamos que se restringirmos o contradomínio da função característica em  $\{0, 1\}$ , teremos a definição de função característica para conjuntos usuais.

Dentro da teoria usual dos conjuntos, é de vital importância o estudo das funções contínuas. Nesse contexto, uma função de uma variável real é contínua na vizinhança de um ponto de seu domínio quando a mesma não apresenta saltos ou interrupções. Um estudo mais geral da continuidade pode ser feito através do conceito de espaço topológico, definido como segue: sejam  $X$  um conjunto e  $\delta$  uma família de subconjuntos de  $X$ . O par  $(X, \delta)$  é um espaço topológico e  $\delta$  é uma topologia quando o conjunto vazio e o conjunto  $X$  pertencem a  $\delta$ ; uma união arbitrária de elementos de  $\delta$  é um elemento de  $\delta$ ; e a intersecção de dois elementos de  $\delta$  é um elemento de  $\delta$ . Nessas condições, os elementos de  $\delta$  são chamados conjuntos abertos e o complementar de um conjunto aberto é denominado conjunto fechado. Definido o espaço topológico, pode-se mostrar que uma função  $f$ , cujo domínio é o espaço topológico  $(X, \delta)$  e contradomínio o espaço topológico  $(Y, \gamma)$  é contínua se, e somente se, a inversa de todo conjunto aberto de  $Y$  é um conjunto aberto de  $X$ . Pode-se mostrar também o seguinte teorema:

**Teorema 1:** Sejam  $(X, \delta)$  e  $(Y, \gamma)$  espaços topológicos e  $f$  uma função  $f: (X, \delta) \rightarrow (Y, \gamma)$ . Temos, então, que as condições i e ii, abaixo, são equivalentes, da mesma forma que iii e iv.

- i. a função  $f$  é contínua.
- ii. A inversa de todo subconjunto fechado de  $Y$  é um subconjunto fechado de  $X$
- iii Para todo subconjunto  $A$  de  $X$ , a função inversa de toda vizinhança de  $f(A)$  é uma vizinhança de  $A$ . (Em um espaço topológico  $(X, \delta)$  uma vizinhança de  $x \in X$  é qualquer elemento de  $\delta$  que contenha  $x$ )
- iv. Para todo subconjunto  $A$  de  $X$  e para toda a vizinhança  $V$  de  $f(A)$ , existe uma vizinhança  $W$  de  $A$  tal que  $f(W) \subseteq V$ .

Utilizando-se da recém formulada concepção de subconjuntos fuzzy, Chang<sup>[1]</sup> define, em 1967, o conceito de espaço topológico fuzzy, cujo caso particular são os espaços topológicos usuais. Nesse mesmo trabalho, é estabelecido que dados dois conjuntos usuais  $X$  e  $Y$ , com subconjuntos fuzzy respectivamente  $A$  e  $B$  e uma função  $f: X \rightarrow Y$ , pode-se definir uma função  $f^\rightarrow$  entre os subconjuntos fuzzy  $A$  e  $B$ ,  $f^\rightarrow$  induzida por  $f$ . Chang estabelece a condição necessária e suficiente para a continuidade de  $f^\rightarrow$  e demonstra um teorema análogo ao Teorema 1, dentro do ambiente fuzzy.

Goguen<sup>[3]</sup> estabelece, em 1969, que os elementos de um subconjunto fuzzy podem possuir grau de pertinência muito mais geral do que apenas o intervalo  $[0, 1]$  e mostra que os resultados de Zadeh são um caso particular dessa nova concepção. Ele define a função de pertinência de um subconjunto fuzzy  $A$  do universo de discurso  $X$  por  $\mu_A: X \rightarrow L$ , em que  $L$  pode ser um semi-grupo, um reticulado ou um anel booleano. Aqui, assumimos  $L$  como um reticulado.

Em nosso trabalho, estendemos os conceitos de espaço topológico fuzzy e função entre subconjuntos fuzzy induzida por uma função usual, apresentados por Chang, para o novo contexto de subconjuntos fuzzy estabelecido por Goguen. O núcleo de nosso trabalho é o *Teorema 2*, que obtemos como sugerido por Liu<sup>[4]</sup>. Abaixo, fornecemos todas as definições necessárias para a compreensão e demonstração do *Teorema 2*.

**Definição:** Sejam  $P$  um conjunto e  $\leq$  uma relação em  $P$ . Dizemos que  $\leq$  é uma *relação de ordem parcial* e  $P$  um *conjunto parcialmente ordenado* quando  $\leq$  satisfaz as propriedades:

- i. reflexiva:  $\forall x \in P, x \leq x$
- ii. transitiva:  $\forall x, y, z \in P$ , se  $x \leq y$  e  $y \leq z$  então  $x \leq z$
- iii. anti-simétrica:  $\forall x, y \in P$ , se  $x \leq y$  e  $y \leq x$  então  $x = y$

Se  $\leq$  é uma relação de ordem parcial e quaisquer dois elementos de  $P$  são comparáveis, então  $\leq$  é denominada *ordem total* e  $P$  é um *conjunto totalmente ordenado*.

**Definição:** Sejam  $P$  um conjunto munido de uma ordem parcial  $\leq$  e  $A$  um subconjunto de  $P$ . O elemento  $x \in P$  é o *supremo* de  $A$ , denotado  $\vee A$ , se são satisfeitas as condições:

- i.  $\forall a \in A, x \geq a$
- ii.  $\forall y \in P \forall a \in A, y \geq a \Rightarrow x \leq y$

De modo dual definimos o *ínfimo*  $\wedge A$  de um subconjunto  $A$  de  $P$

**Definição:** Um conjunto parcialmente ordenado  $L$  é um *reticulado* quando quaisquer dois elementos de  $L$  possuem um supremo e um ínfimo. Um *reticulado completo* é aquele em que *todos* os subconjuntos de  $L$  possuem um supremo e um ínfimo. De modo equivalente, temos que  $L$  é um reticulado se, e somente se, são válidas, para todo  $x, y, z$  em  $L$ , as seguintes propriedades.

- i. *comutativa*:  $x \vee y = y \vee x$ ;  $x \wedge y = y \wedge x$
- ii. *associativa*:  $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ ;  $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
- iii. *absorção*:  $x \vee (x \wedge y) = x$ ;  $x \wedge (x \vee y) = x$

**Definição:** Um reticulado  $L$  é *distributivo* quando para todo  $x, y, z$  em  $L$  são satisfeitas as propriedades:

- i.  $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
- ii.  $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

**Definição:** Seja  $L$  um reticulado tal que  $\forall x \in L, 0 \leq x \leq 1$ . Então  $0$  é o *menor elemento* de  $L$  e  $1$  é o *maior elemento* de  $L$ . O *complemento* de  $x \in L$  é o elemento  $x' \in L$  tal que  $x \wedge x' = 0$  e  $x \vee x' = 1$ . Um reticulado  $L$  é *complementado* quando todo elemento de  $L$  possui um complemento. Uma função  $\prime: L \rightarrow L$  é de *ordem inversa* quando  $\forall a, b \in L, a \leq b \Rightarrow b' \leq a'$ . A operação  $\prime$  é uma *involução* quando  $\forall x \in L, \prime(\prime(x)) = x' = x$  é uma operação de *complementaridade* quando  $\forall a \in L, a'$  é o complementar de  $a$ . A operação  $\prime: L^x \rightarrow L^y$  é a operação de *pseudo-complementação* em  $L^x$  e  $A'$  o conjunto pseudo complementado de  $A$  quando  $\forall A \in L^x, \forall x \in X, A'(x) = (A(x))'$ .

**Definição:** Sejam  $L$  um reticulado e  $\alpha \in L$ . Dizemos que  $\alpha$  é uma *molécula* em  $L$  quando  $\alpha < 1$  e  $\forall a, b \in L, \alpha = a \vee b \Rightarrow \alpha = a$  ou  $\alpha = b$ . Ao elemento minimal de  $L - \{0\}$  chamamos *átomo*.

Para todo  $A \subseteq L$ , denotamos o conjunto de todas as moléculas de  $L$  em  $A$  por  $M(A)$ .

Definição: Consideremos  $X$  um conjunto usual não vazio (o universo do discurso) e  $L$  um reticulado completo. Um *subconjunto  $L$ -fuzzy de  $X$*  é uma função  $A: X \rightarrow L$ . A família de todos os subconjuntos fuzzy de  $X$  é denotado  $L^X$  e denominado *espaço fuzzy*.

Definição: Sejam  $X$  um conjunto usual não vazio e  $L$  um reticulado completo. Um *ponto  $L$ -fuzzy* é um subconjunto  $x_a \in L^X$  definido por:  $\forall y \in X, x_a(y) = \begin{cases} a & \text{se } x = y \\ 0 & \text{se } x \neq y \end{cases}$ . Para todo  $A \subseteq L^X$  denotamos o conjunto de todos os pontos  $L$ -fuzzy de  $X$  em  $A$  por  $Pt(A)$ .

Definição: Sejam  $L^X$  e  $L^Y$  espaços  $L$ -fuzzy e  $f: X \rightarrow Y$  uma função usual. A partir de  $f$ , induzimos uma função  $f^\rightarrow$  denominada *função induzida  $L$ -fuzzy* e definida por:

$$f^\rightarrow: L^X \rightarrow L^Y, f^\rightarrow(A)(y) = \vee \{A(x) \mid f(x) = y\}, \forall A \in L^X, \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

A *inversa*  $f^\leftarrow$  da função induzida  $L$ -fuzzy é definida por:

$$f^\leftarrow: L^Y \rightarrow L^X, f^\leftarrow(B)(x) = B(f(x)), \forall B \in L^Y, \forall x \in X.$$

Definição: Consideremos  $X$  um conjunto ordinário não vazio,  $L$  um reticulado completo, munido de uma operação pseudo-complementar  $\prime: L \rightarrow L$  e  $\delta \subseteq L^X$ . O conjunto  $\delta$  é denominada uma *topologia* e o par  $(L^X, \delta)$  é um *espaço topológico  $L$ -fuzzy* quando são satisfeitas as propriedades:

- i. o menor e o maior elementos de  $L$  estão na topologia, ou seja,  $\underline{0} \in \delta$  e  $\underline{1} \in \delta$
- ii.  $\forall A \subseteq \delta, \vee A \subseteq \delta$
- iii.  $\forall U, V \in \delta, U \wedge V \in \delta$ .

Todo elemento de  $\delta$  é chamado *subconjunto aberto* de  $L^X$  e todo conjunto pseudo-complementar de um subconjunto aberto é denominado *subconjunto fechado* de  $L^X$ .

Definição: Sejam  $X$  um conjunto ordinário não vazio,  $L$  um reticulado completo munido de uma operação pseudo-complementar  $\prime: L \rightarrow L$  e  $\eta \subseteq L^X$ . O conjunto  $\eta$  é uma *co-topologia  $L$ -fuzzy* em  $X$  e o par  $(L^X, \eta)$  um *espaço topológico  $L$ -fuzzy* quando são satisfeitas as propriedades:

- i.  $\underline{0} \in \eta$  e  $\underline{1} \in \eta$
- ii.  $\forall A \subseteq \eta, \wedge A \subseteq \eta$
- iii.  $\forall U, V \in \eta, U \vee V \in \eta$

Todo elemento de  $\eta$  é chamado *subconjunto fechado* de  $L^X$  e todo conjunto pseudo-complementar de um subconjunto aberto é *subconjunto fechado* de  $L^X$ .

Definição: Sejam  $(L^X, \delta)$  um espaço topológico fuzzy e  $A \in L^X$ . Definimos o *interior* de  $A$  como o supremo de todos os subconjuntos abertos contidos em  $A$  e o *fecho* de  $A$  como o ínfimo de todos os subconjuntos fechados que contém  $A$ . Denotamos o interior de  $A$  e o fecho de  $A$  por  $A^\circ$  e  $A^-$ , respectivamente.

Definição: Sejam  $(L^X, \delta)$  um espaço topológico fuzzy e  $\delta_0 \subseteq \delta$ . Então:

- i.  $\delta_0$  é uma *base* de  $\delta$  quando  $\delta = \{\vee A : A \subseteq \delta_0\}$
- ii.  $\delta_0$  é uma *sub-base* de  $\delta$  quando a família  $\{\wedge B : B \in \delta_0 - \{\emptyset\}\}$  é uma base de  $\delta$ .

Definição: Sejam  $(L^X, \delta)$  um espaço topológico fuzzy,  $\eta$  uma co-topologia  $L$ -fuzzy em  $X$  e  $x_a \in Pt(L^X)$ . Então:

- i.  $U \in \delta$  é uma *vizinhança* de  $x_a$  em  $(L^X, \delta)$  quando  $x_a \in U$  ou  $x_a \leq U$ . A família de todas as vizinhanças de  $x_a$  em  $(L^X, \delta)$  é denominada *sistema de vizinhanças* e é denotada por  $N(x_a)$ .
- ii.  $P \in \eta$  é uma *vizinhança remota* de  $x_a$ , quando  $x_a$  não está contido em  $P$ . A família de todas as vizinhanças remotas de  $(L^X, \eta)$  é denominada *sistema de vizinhanças remotas* e denotada por  $R(x_a)$ .

Definição: Sejam  $(L^X, \delta)$  e  $(L^Y, \gamma)$  espaços topológicos L-fuzzy e  $f^\rightarrow : (L^X, \delta) \rightarrow (L^Y, \gamma)$  uma função induzida L-fuzzy. Dizemos que  $f^\rightarrow$  é uma *função contínua L-fuzzy* quando existe uma função inversa L-fuzzy  $f^\leftarrow : L^Y \rightarrow L^X$  tal que todo subconjunto aberto de  $(L^Y, \gamma)$  é um aberto de  $(L^X, \delta)$ .

Teorema: Sejam  $(L^X, \delta)$ ,  $(L^Y, \gamma)$  espaços topológicos fuzzy e  $f^\rightarrow : (L^X, \delta) \rightarrow (L^Y, \gamma)$  uma função L-fuzzy. As seguintes condições são equivalentes:

- i.  $f^\rightarrow$  é uma função induzida L-fuzzy contínua.
- ii. A função induzida L-fuzzy inversa de todo subconjunto fechado de  $L^Y$  é um subconjunto L-fuzzy fechado de  $L^X$ , ou seja,  $\forall B \in \gamma', f^\leftarrow(B) \in \delta'$ .
- iii. A função  $f^\rightarrow$  é contínua em toda molécula de  $(L^X, \delta)$ .
- iv.  $\forall e \in M(L^X), \forall Q \in R(f(e)), f^\leftarrow(Q) \in R(e)$ .
- v.  $\gamma$  possui uma sub-base  $\gamma_0$  tal que para todo  $V \in \gamma_0$ , temos que  $f^\leftarrow(V) \in \delta$ .
- vi.  $\gamma$  possui uma sub-base  $\gamma_0'$  tal que para todo  $Q \in \gamma_0'$ , temos que  $f^\leftarrow(V) \in \delta'$ .
- vii. a imagem por  $f^\rightarrow$  do fecho de todo conjunto  $A$  está contido no fecho da imagem de  $f^\rightarrow(A)$ , ou seja,  $\forall A \in L^X, f^\rightarrow(A^-) \leq (f^\rightarrow(A))^-$ .
- viii. O fecho da imagem inversa por  $f^\leftarrow$  de todo conjunto  $B$  está contido na imagem inversa do fecho de  $B$ , ou seja,  $\forall B \in L^Y, (f^\leftarrow(B))^- \leq f^\leftarrow(B^-)$ .
- ix. A imagem inversa por  $f^\leftarrow$  do interior de todo conjunto  $B$  está contido no interior da imagem inversa de  $f^\leftarrow(B)$ , ou seja,  $\forall B \in L^Y, f^\leftarrow(B^o) \leq (f^\leftarrow(B))^o$ .  $\square$

Com esse trabalho, verificamos que os conceitos e teoremas que envolvem funções e espaços topológicos usuais podem ser adequados para o ambiente fuzzy, seja na concepção de subconjuntos fuzzy elaborada por Zadeh, seja na concepção de Goguen. Em particular, verificamos que a caracterização da continuidade de funções através de espaços topológicos fuzzy, proposta por Chang, no contexto de Zadeh, pode ser estendida para a abordagem de Goguen dos conjuntos fuzzy, numa crescente generalização. Como estudo posterior, fica a possibilidade de se verificar as condições necessárias para que o teorema acima se verifique, considerando  $L$ , em vez de reticulados, anéis booleanos ou semi-grupos.

## Bibliografia:

1. CHANG, C. L. Fuzzy Topological Spaces. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, vol. 24, p. 182-190, 1968.
2. DUGUNDJI, J. **Topology**, 1. ed. Dubuque, Iowa: C. Brown Publisher: 1989. 447p.
3. GOGUEN, J. A. L-Fuzzy Sets. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, vol. 18, p. 145-174, 1967.
4. LIU, Y. M.; LUO, M. K. **Fuzzy Topology**, 1.ed. Singapura: World Scientific: 1997. 353p. Advances in Fuzzy Systems – Applications and Theory Vol. 9.
5. ZADEH, L. A. Fuzzy Sets. **Information Control**, vol. 8, p. 338-353, 1965.
6. ZHANG, G. Q. Fuzzy continuous function and some properties. **Fuzzy Sets and Systems**, vol. 43, p. 159-171, 1991.
7. Nguyen, H. T.; Walker, E. A. **A First Course in Fuzzy Logic**, 1.ed. Boca Raton, Florida: CRC Press: 1996. 264p.
8. BOJADZIEV, G.; BOJADZIEV, M. **Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Applications**, 1.ed. Singapura: World Scientific: 1995. 273p. Advances in Fuzzy Systems – Applications and Theory Vol. 5.